El uso del Cabri Geometre II en las funciones del Preuniversitario.

Autores:

M. Sc. Mario Estrada Doallo

estrada@hlg.rimed.cu

M. Sc. José Luis Sánchez Santiesteban

josex@hlg.rimed.cu

M. Sc. Ariel J. Limias Torres

ariell@hlg.rimed.cu

Resumen

En el artículo se ejemplifica una forma de darle tratamiento metodológico a las funciones que se estudian en el Preuniversitario, haciendo uso del sistema de Geometría Dinámica Cabri Geometre II. La propuesta puede contribuir a mejorar el aprendizaje de esta temática, tan importante para los estudios futuros de los alumnos, y a mejorar el interés de los estudiantes por la Matemática. También, la propuesta le servirá de guía a profesores para el uso de estos sistemas en la enseñanza de esta asignatura, la cual es un objetivo en los programas vigentes.

Palabras claves: Función, Geometría Dinámica, Preuniversitario.

Summary

In the article, the authors develop a way to exemplify and provide methodological treatment to the functions studied in Senior High School, using Dynamic Geometry Cabri Geometre II. The proposal can contribute to improve the learning of mathematics, so important for the future studies of the students and improve their interest towards the subject. Besides, the proposal will be a proper guide for teachers to use these systems in the teaching of mathematics, which is a goal of current programs.

Key words: Function, Dynamic Geometry, Preuniversitario.

Desde épocas muy remotas, el hombre, al estudiar los distintos fenómenos de la naturaleza, distinguió las magnitudes que caracterizan estos fenómenos y se percató que existían magnitudes constantes y magnitudes variables. Y por supuesto, lo más común es que en el estudio de un fenómeno prevalezcan las magnitudes variables, pues los valores de las magnitudes consideradas en el mismo varían de acuerdo con los cambios que se produzcan en las condiciones en que transcurre el fenómeno estudiado.

Indudablemente, lo más interesante es establecer la relación entre magnitudes variables y magnitudes constantes que intervienen en la descripción del fenómeno dado y, en particular, aquellas relaciones en que, a valores de ciertas magnitudes, corresponden determinados valores de las restantes. Este último tipo de relaciones, conocidos con el nombre de relaciones funcionales, son precisamente una manifestación cuantitativa de la relación de causa y efecto en los fenómenos, por lo que son de gran importancia en el estudio de la naturaleza.

Evidentemente, estas relaciones funcionales, en un inicio, se estudiaban de una forma muy sencilla, pero a medida que el estudio de los fenómenos de la naturaleza se fue profundizando, el hombre necesitó de fórmulas con las cuales poder expresar matemáticamente las leyes descubiertas.

Esto se logró en el siglo XVII con la introducción de la magnitud variable cartesiana por René Descartes y Pierre Fermat. Con esta introducción las funciones se comenzaron a representar mediante fórmulas y gráficos.

Sin embargo, la palabra función no surge hasta que el matemático alemán Leibniz (1646–1716) la utilizó en 1694 para designar la dependencia lineal entre los valores de las abscisas y los puntos de la representación gráfica.

Por otro lado, el criterio de que bastaba asociar la noción de función a las fórmulas analíticas fue insuficiente, pues con el estudio de las vibraciones de una cuerda se encontró que no en todos los casos es posible obtener una fórmula de este tipo.

No fue hasta mediados del siglo XIX en que se logró dar una definición del concepto de función que reflejara exclusivamente el hecho de que una función es una relación entre distintas magnitudes, que posee ciertas características, eliminándose así la limitante de que dicha relación pudiera ser o no expresada analíticamente mediante una fórmula; esto fue logrado por el matemático alemán Dirichlet (1805–1859).

Y como es sabido, en casi todas las ramas de la Matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. Por lo tanto, el concepto de función es de gran generalidad.

Como se puede apreciar, se está en presencia de uno de los conceptos más importantes de la Matemática y que se comienza a formar desde la enseñanza preescolar y culmina en la Universidad.

En el presente artículo se muestran algunas ideas de cómo tratar las funciones que se estudian en el Preuniversitario, haciendo uso de los programas de Geometría Dinámica, en particular, el Cabri Geometre II, que constituye una herramienta poderosa para la graficación de funciones y como medio de enseñanza para este tipo de contenido, por las posibilidades de interactividad con el usuario.

Dentro de los **objetivos generales** de la asignatura Matemática en el nivel Medio Superior se encuentra: *"Desarrollar hábitos de estudio y técnicas para la adquisición independiente de nuevos conocimientos y la racionalización del trabajo mental con ayuda de los recursos de las* ***tecnologías de la informática y la comunicación****, que le permitan la superación permanente y la orientación en el entorno natural, productivo y social donde se desenvuelve." (Programa de Matemática, 2004: 6-7).*

Por otra parte, en las **indicaciones metodológicas generales** de la asignatura Matemática, se plantea la utilización de las tecnologías de la Informática y la Comunicación con el objetivo de adquirir información y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con **fines heurísticos**. Y se insiste que otro elemento a tener en cuenta en la planificación de las clases es la introducción coherente del software educativo, los sistemas de aplicación y los asistentes matemáticos como Equation y el Geómetra, los cuales deben ser utilizados por los alumnos dentro y fuera de las clases, a partir de la certera orientación de los docentes.

Como se puede observar, el uso de las nuevas tecnologías constituye, en la actualidad, una prioridad dentro de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática del Preuniversitario.

Por otro lado, en los programas actuales de Matemática para este nivel se contempla el estudio de las funciones lineales, cuadráticas, con radicales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, y dentro de los objetivos generales relacionados con la temática de las funciones están:

- ✓ Sistematizar las propiedades (monotonía, paridad, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad) de las funciones a estudiar.
- ✓ Determinar las propiedades fundamentales de las funciones estudiadas.
- ✓ Representar gráficamente las funciones estudiadas.

- ✓ Transferir de una representación a otra de las funciones, es decir, de sus propiedades a su representación analítica, gráfica o descriptiva (en el lenguaje común) y viceversa, aplicando estos conocimientos a situaciones de la práctica u otras ciencias.

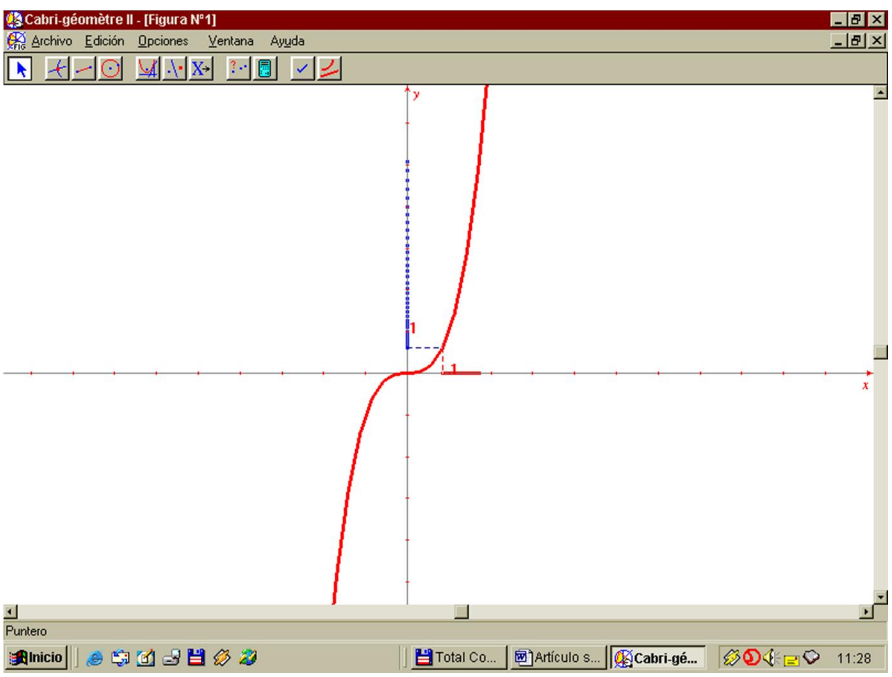
En este caso se aborda una de dichas aristas con el uso del programa de Geometría Dinámica Cabri Geometre II para el tratamiento de las funciones, que además está insertado dentro del software “Eureka” dirigido a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en el Preuniversitario; es decir, los autores hacen una propuesta de cómo usar esta tecnología en el estudio de las propiedades de las funciones a partir del gráfico de la misma.

Se ejemplificará el trabajo con la función $y = x^3$.

Para estudiar las propiedades fundamentales de la función a través de su representación gráfica, con el uso del programa Cabri Geometre II, se pueden orientar al estudiante las siguientes tareas:

<u>Tarea 1:</u>

1. Grafica la función $y = x^3$.
2. Activa la traza del punto que recorre el eje “x” y del punto que recorre el eje “y”.
3. Colorea con rojo el punto del eje “x” y con azul el punto del eje “y”.
4. Mueve el punto del eje “x”. ¿Qué observas en los ejes de coordenadas?



Con esta tarea el alumno puede observar que las proyecciones de la gráfica de la curva sobre los ejes de las abscisas y de las ordenadas es precisamente todo el eje. Esto da la posibilidad al estudiante de llegar a la conclusión de que el **dominio** y la **imagen** de la función son los **números reales**.

Además, al observar el gráfico de la función se percatará que la curva corta al eje de las abscisas en $x = 0$, siendo este el **cero** de la función.

De la misma forma puede observar que la curva no alcanza **ni máximo ni mínimo**.

Para la **simetría** se puede orientar la siguiente tarea:

<u>Tarea 2:</u>

A la función anterior aplícale una rotación con centro en el origen de coordenadas y un ángulo de rotación de 180^0. ¿Qué observas? ¿A qué conclusión puedes arribar?

Y podrá observar que el gráfico imagen coincide con el gráfico original. Lo que le permitirá concluir que la función es **simétrica** respecto al origen de coordenadas. Y de aquí se deduce la propiedad de que la función es **impar**.

Para la **monotonía** de la función se puede orientar la siguiente tarea:

<u>Tarea 3:</u>

1. Determina las coordenadas de los puntos que se mueven en los ejes de las abscisas y de las ordenadas.
2. Mueve el punto del eje de las abscisas de manera que los valores de la x aumenten. ¿Qué sucede con los valores de las y?
3. ¿A qué conclusión puedes arribar?

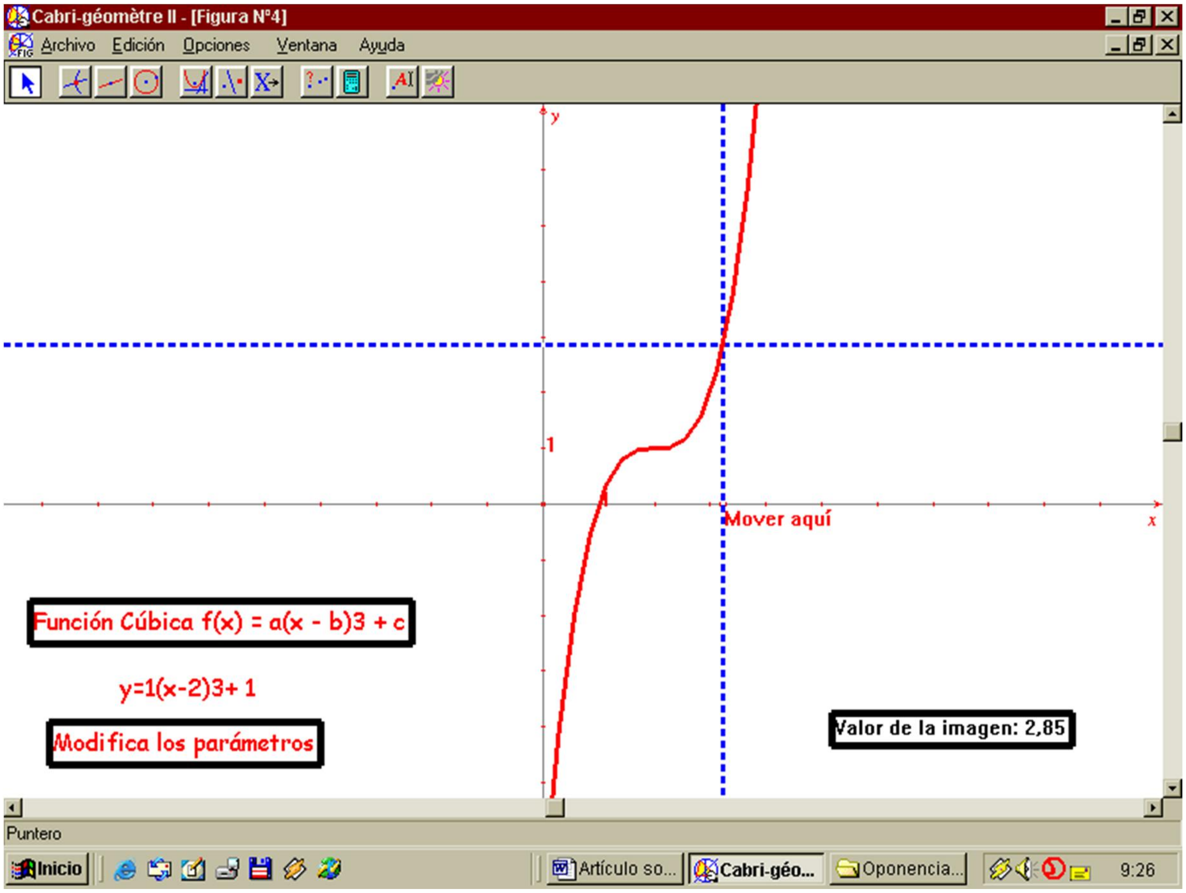
De esta forma el estudiante puede concluir que la función es **monótona creciente** en todo su dominio.

A partir del mismo gráfico de la función cúbica se puede determinar si la función es **inyectiva** o no; para ello se puede orientar al estudiante que trace una recta una paralela al eje de abscisas, si esta corta al gráfico de la función en más de un punto, entonces dicha función no es inyectiva. Por lo tanto, en este caso el alumno se percatará que la función es inyectiva, pues al mover la recta, paralela al eje de abscisas, esta corta al gráfico en un solo punto.

También es importante valorar el efecto de los parámetros a, b y c sobre el gráfico de $y = x^3$ y en sus propiedades, es decir, se hará el análisis de la función de la forma:

$$f(x)=a(x-b)^3+ c \quad (a \neq 0)$$

El estudio se hará por etapas a partir del gráfico de $y = x^3$ y con el uso del siguiente medio de enseñanza.



Este medio permitirá al estudiante variar los parámetros a, b y c en la ecuación de la función y podrá observar cómo varía la gráfica de la función $y = x^3$, lo que le permitirá obtener las propiedades de las diferentes funciones que se obtienen.

Tarea 1:

a) Asigna los siguientes valores a los parámetros a, b y c, $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$.

b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = x^3$.

c) Determina las propiedades de la función que obtuviste.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = (x + 2)^3$.

Propiedades.

Dominio: $x \in R$

Imagen: $y \in R$

Cero: $x = -2$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto (-2;0).

Monotonía: monótona creciente.

Es una función inyectiva.

Puede concluir además que su gráfico se obtiene por una traslación del gráfico de $y = x^3$, de dos unidades en el sentido negativo del eje de abscisas.

Tarea 2:

a) Asigna los siguientes valores a los parámetros a, b y c. a = 1/2, b = -2 y c = 0.

b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = (x + 2)^3$.

c) Determina las propiedades de la función que obtuvo.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = ½ (x + 2)^3$.

Propiedades.

Dominio: $x \in R$

Imagen: $y \in R$

Cero: $x = -2$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto (-2; 0).

Monotonía: monótona creciente.

Es una función inyectiva.

Puede concluir además que su gráfico se obtiene por una contracción de razón ½ a partir del gráfico de $y = (x + 2)^3$

Tarea 3:

a) Asigna los siguientes valores a los parámetros a, b y c. a = -1/2, b = -2 y c = 0.

b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = ½ (x + 2)^3$.

c) Determina las propiedades de la función que obtuvo.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = - ½ (x + 2)^3$.

Propiedades.

Dominio: $x \in R$

Imagen: $y \in R$

Cero: $x = -2$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto (-2; 0).

Monotonía: monótona decreciente.

Es una función inyectiva.

Puede concluir que el gráfico se obtiene por una reflexión respecto al eje de abscisas, a partir del gráfico de $y = ½ (x + 2)^3$.

<u>Tarea 4:</u>

a) Asigna los siguientes valores a los parámetros a, b y c. $a = -1/2$, $b = -2$ y $c = 1$.

b) Observa qué sucede con el gráfico de la función $y = ½ (x + 2)^3$.

c) Determina las propiedades de la función que obtuvo.

A partir del gráfico el estudiante puede reconocer las siguientes propiedades de la función $y = - ½ (x + 2)^3 + 1$.

<u>Propiedades.</u>

Dominio: $x \in R$

Imagen: $y \in R$

Cero: $x = -2$

Máximo o mínimo: no alcanza máximo ni mínimo.

Simetría: es simétrica respecto al punto (-2; 1).

Monotonía: monótona decreciente.

Es una función inyectiva.

No es una función impar.

Puede concluir que el gráfico se obtiene mediante una traslación de una unidad en el sentido del eje de ordenadas, a partir del gráfico de $y = -1/2 (x + 2)^3$.

A manera de resumen, el alumno puede plantear que el efecto de cada parámetro en el gráfico de la función $f(x) =a(x-b)^3 + c$ respecto al gráfico $y = x^3$, es como sigue:

<u>Parámetro a:</u>

Dilatación o contracción: según sea $|a|$ mayor o menor que 1.

Reflexión: respecto al eje de abscisas si $a < 0$

<u>Parámetro b:</u>

Traslación en la dirección positiva del eje de abscisas si $b > 0$

Traslación en la dirección negativa del eje de abscisas si $b < 0$

Parámetro c:

Traslación en la dirección positiva del eje de ordenadas si $c > 0$

Traslación en la dirección negativa del eje de ordenadas si $c < 0$

Como se puede observar, no hay dudas que el uso de estas tecnologías en la enseñanza de las funciones en el Preuniversitario y usando este tipo de actividades, donde el estudiante interactúa con el programa, se lograrán los objetivos propuestos de una forma más productiva, pues el propio estudiante va descubriendo las diferentes propiedades y va viendo cómo varía el gráfico de la función en dependencia de la variación de los diferentes parámetros que intervienen en la ecuación de la función.

Para las demás funciones que son objeto de estudio en el Preuniversitario se puede realizar un trabajo similar al ejemplificado con la función cúbica, haciendo uso del programa de Geometría Dinámica Cabri Geometre II.

En el mundo presente la escuela no puede estar al margen de los avances tecnológicos. Actualmente el uso de las calculadoras y computadores proveen al estudiante de herramientas específicas de cálculo, que le permiten dedicar más tiempo al proceso de búsqueda crítica de caminos de solución a situaciones propuestas, que a las operaciones repetitivas.

La interacción es, quizás, una de las posibilidades más prometedoras del uso de la tecnología como apoyo educacional y la tendencia de los últimos años ha sido la de crear aplicaciones de propósito educativo que permitan esta interactividad; un ejemplo es precisamente el sistema de Geometría Dinámica Cabri Geometre II, el cual brinda este tipo de facilidad.

En las actividades interactivas, el estudiante tiene una participación activa. Más allá de apretar botones para ver qué ocurre, en este tipo de actividad el alumno puede participar activamente de situaciones que despierten su interés y lo hagan descubrir. Es decir, este tipo de actividades brinda la posibilidad de que el estudiante razone, que descubra y concluya. Además permiten resolver problemas por ensayo y error e introducir conceptos. Por otra parte, la literatura sobre actividades matemáticas usando la computadora crece día a día; en la Internet se brinda software educativo gratuito para graficar funciones, para explorar lugares geométricos, para simular experimentos aleatorios, etc. Los profesores deben conocer y manejar estos programas con el fin de diseñar actividades de aprendizajes que permitan el uso de las computadoras como medio de resolución de situaciones problemáticas.

Con el uso de la tecnología el profesor adquiere compromisos diferentes. Una clase en la cual el estudiante pueda explorar o hacer conclusiones, requiere de mayor preparación. Pueden ocurrir situaciones no previstas, conclusiones no esperadas y debe estar preparado para ello.

Por otra parte, las dinámicas educativas computarizadas requieren un mayor compromiso por parte del estudiante. Hay tareas que debe atender solo, con pocos, o ningún control por parte del profesor. Y muchas actividades estarían condenadas al fracaso si el estudiante no asume un rol activo en el proceso.

El tema que se ejemplifica tiene su dificultad a la hora de ser tratado en el aula por vías tradicionales y no hay dudas que el uso de esta tecnología puede contribuir a mejorar los resultados del aprendizaje del mismo, aunque hay que tener presente la comunicación que debe existir entre el estudiante y el educador para lograr la construcción del concepto deseado.

Estos programas abren una serie de oportunidades. Entre otras características, llama la atención que pueden adaptarse a las dificultades propias de cada estudiante, pues permiten que sea él mismo quien controle el tiempo dedicado a estudiar una materia; se espera que esta libertad pueda contribuir a aumentar el aprovechamiento del tiempo dedicado al aprendizaje, que posibilita a los estudiantes aprender independientemente, en su propio espacio y de una manera no lineal, facilitando la generación de métodos personificados de estudio.

Las opciones que ofrece el uso adecuado del sistema Cabri Geometre II podría generar mejoras en la calidad de las clases. No obstante, se hace necesario revisar las propuestas hechas en otras universidades, con el objetivo de estudiar sus resultados para minimizar cualquier amenaza que pueda perjudicar la estrategia que se propone en el trabajo.

Por último, los autores desean resaltar que estos sistemas no deben inducir a hacer usos inadecuados de los mismos; las facilidades gráficas, la velocidad y otras ventajas de este medio no son suficientes razones para usarlo en Educación. La mejor razón para decidir usarlo en el desarrollo de un tema es porque puede contribuir a mejorar los objetivos propuestos párale mismo. Y por otra parte, se debe pensar en ir cambiando para bien la forma de actuar de los docentes.

BIBLIOGRAFÍA

AZINIAN, H. Capacitación docente para la aplicación de tecnologías de la información en el aula de Geometría. Brasilia, Universidad de Buenos Aires, 1998. IV Congreso RIBIE.

COELHO, M. I. O Cabri-géomètre na resolução de problemas: Processos evidenciados e construão de conhecimentos por alunos do 6º ano de escolaridade. En: Aprendizagens em Matemática. Secção de Educação e Matemática. Portugal, Sociedad Portuguesa de Ciências da Educação, 1997.

CUBA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Programa de Matemática. Décimo Grado. La Habana, 2004.

ESTRADA, M. [ET AL.]. La Enseñanza de la Geometría Asistida por Computadoras en la Secundaria Básica Cubana. Revista Electrónica Luz, (Holguín), No. 1, 2002.

GONZÁLEZ-MANET, E. La nueva era de las tecnologías informativas. Revista Educación (La Habana), 1995.

GRAVINA, M. A. Y L. M. SANTAROSA. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. Brasilia, 1998. IV Congreso RIBIE.

GREEN, D. Las implicaciones de calculadoras con medios para la manipulación simbólica y la Geometría Dinámica. En: Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático. United Kingdom, 1998.

NEGRÓN, C Y M. ESTRADA. Aprendiendo a descubrir con la computadora. En: Actas del Evento Internacional COMPUMAT. Manzanillo, Universidad Cuenca del Plata, I.S.P. “Blas Roca Calderío”, 2000.

NEGRÓN, C. [ET AL.]. El uso del ordenador en la solución de problemas matemáticos. En: CD Evento Internacional de Matemática Educativa e Informática. Camagüey, Universidad de Camagüey, 2002.

-----. EL uso del programa Cabri Geometre en la enseñanza del Análisis Matemático. En: CD Evento Internacional COMPUMAT. Sancti Spiritus, I.S.P., 2003.

-----. El uso de los medios de cómputo como una alternativa para la enseñanza de la Matemática. Proyecto de Investigación. Holguín, I.S.P. “José de la Luz y Caballero”, 2001.

RÍOS, J. El uso de la tecnología en la clase de Matemáticas. Escuela de Matemáticas. Brasilia, Universidad Metropolitana, 1998. Caracas, IV Congreso RIBIE.

SIDERICOUDES, O. A formalização de conceitos da geometria analítica a través do micromundo Logo. Núcleo de Informática Aplicada à Educação – NIED. São Paulo, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 1998. Brasil, IV Congeso RIBIE.

THANH, N. Un Ambiente Interactivo para la Resolución de Problemas de Geometría: la concepción, realización y experimentación. En: Actas del Congreso Internacional de Educación Matemática del Continente Asiático. Vietnam. 1998.

http://www.cabri.net/cabriole/

http://www.cabri.imag.fr/

http://www.cabriworld/

http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm