La visualización: un recurso didáctico para la enseñanza de la matemática

Autores: José A. Hernández Benítez
Mario Estrada Doallo
José L. Sánchez Santiesteban
Carlos Negrón Segura

Resumen.

La Visualización como recurso didáctico constituye un poderoso instrumento para el docente, pues la misma es fuente de conocimientos relacionados con la generalización y con el método inductivo, es un medio de ilustración que sirve de fundamento de la percepción sensorial, en la Enseñanza Problémica se presenta como un medio auxiliar que facilita la solución del problema, sirve para el planteamiento de problemas docentes y la creación de situaciones problémicas, y es un medio que permite crear marcos de referencia para el procesamiento de la información verbal.

No hay dudas de que la computadora constituye un medio ideal para el desarrollo de la Visualización como un recurso didáctico del docente, pues la acción cognitiva más importante que puede desarrollar un alumno con el ordenador, en relación con la visualización es la “exploración”, tanto por orientación del maestro como por propia iniciativa, esta exploración permite abordar conceptos con un alto nivel de complejidad de una manera informal en los primeros estadios de su formación, utilizando los recursos visuales disponibles; estas avanzadas tecnologías permitan el acercamiento al concepto de diversas maneras eligiendo variadas formas de representación ya sean éstas verbales, simbólicas, icónicas, gráficas, numéricas, etcétera.

En el trabajo se presentan ejemplos de cómo usar el ordenador en la enseñanza de la Matemática teniendo en cuenta los presupuestos teóricos sobre la Visualización como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje. Los resultados forman parte del proyecto que se desarrolla en el Departamento de Matemática del ISP “José de la Luz y Caballero”, con el objetivo de aplicar los diferentes paquetes de programas en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Summary.

The Visualization like didactic resource constitutes a powerful instrument for the educational one, because the same one is source of knowledge related with the generalization and with the inductive method, it is a means of illustration that serves as foundation of the sensorial perception, in Problem Solving it is presented assistant that facilitates the solution of the problem, it is good for the position of educational problems and the creation of “situations” and it is a means to create reference marks for the prosecution of the verbal information.

There are not doubts that the computer constitutes a ideal tool for the development of the Visualization like a didactic resource of the educational one, because the more important cognitive action that a student can develop with the computer, in connection with the visualization is the " exploration ", so much for the teacher's orientation like for own initiative, this exploration allows to approach concepts of high level of complexity in an informal way in the first stadiums of its formation, using the available visual resources; these outposts technologies allow the approach to the concept in diverse

ways, choosing varied representation forms they are already these verbal, symbolic, iconics, graphic, numeric, etc..

In the work examples are presented of how to use the computer in the teaching of the Mathematical one keeping in mind the theoretical budgets on the Visualization like didactic resource in the process of teaching learning. The results are part of the project that is developed in the Department of Mathematical of the Institute “José de la Luz y Caballero”, with the objective of applying the different packages of programs in the teaching and the learning of the Mathematical one.

Introducción

En la actualidad se han realizado variadas investigaciones sobre la utilización de la Visualización en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y se observa que el medio por excelencia a utilizar es la computadora. Es evidente que el uso de recursos visuales en el aprendizaje, ha estado sujeto históricamente al desarrollo de los “medios” materiales con los que se puede implementar; cada salto en la tecnología de los medios visuales ha provocado nuevas posibilidades para la Visualización; la aparición del cine y la televisión, los proyectores de vistas fijas, los retroproyectores, se convirtieron casi inmediatamente en medios auxiliares eficaces en la enseñanza; la economía de tiempo era incuestionable.

La apoteosis de la Visualización llega con la aparición de los ordenadores personales, el crecimiento de las posibilidades de estos medios con alta resolución gráfica ha ofrecido enormes posibilidades al modo visual de pensamiento en las Matemáticas. En el propio desarrollo de estos medios se observa una evolución o tránsito que ha permitido perfeccionar la comunicación hombre–máquina; si al principio su gestión y manejo se regía por toda una serie de comandos o instrucciones basados en caracteres denominados “interfaz alfanumérico de usuario” ya estos han sido sustituidos por “entornos gráficos”.

En el presente artículo se presentan algunos ejemplos que muestran cómo usar el ordenador en la enseñanza de la Matemática teniendo en cuenta los presupuestos teóricos sobre la Visualización como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Desarrollo.

La acción cognitiva más importante que puede desarrollar un alumno con el ordenador, en relación con la visualización es la “exploración”, tanto por orientación del maestro como por propia iniciativa, esta exploración permite abordar conceptos de alto nivel de complejidad de una manera informal en los primeros estadios de su formación, utilizando los recursos visuales disponibles; estas avanzadas tecnologías permiten el acercamiento al concepto de diversas maneras eligiendo variadas formas de representación ya sean éstas verbales, simbólicas, icónicas, gráficas, numéricas, etcétera.

Las imágenes en movimiento (dinámicas) se constituyen en una opción visual de extraordinaria importancia en el descubrimiento de nexos, relaciones, propiedades, superando con creces las posibilidades de las imágenes estáticas.

La imagen, como se ha observado, tiene papeles muy diferentes e importantes en el quehacer de los matemáticos. La imagen es, muy frecuentemente,

- matriz de la que surgen los conceptos y métodos mismos del campo,
- estimuladora de problemas de interés relacionados con los objetos de la teoría,
- sugeridora de relaciones de otra forma un tanto ocultas capaces de conducir de forma fiable hacia la resolución de los problemas y hacia la construcción de la teoría,
- auxiliar potente para la retención de forma unitaria y sintética de los contextos que surgen recurrentemente en el trabajo,
- vehículo eficaz de transmisión rápida de las ideas,
- ayuda poderosa en la actividad subconsciente en torno a los problemas complicados de la teoría. (Guzmán, 1996)

Es oportuno referirse a la Teoría Dual de Codificación propuesta por A. Paivio (1986) la que intenta equilibrar los procesamientos verbales y no verbales, en ella se asume que hay dos subsistemas cognitivos, uno especializado para la representación y procesamiento de objetos no verbales (imágenes) y el otro especializado para el tratamiento con el lenguaje, en ellos aparecen respectivamente, unidades representacionales, una para las imágenes mentales y otra para las entidades verbales, las segundas son organizadas en términos de asociaciones y jerarquías y las primeras en términos de relaciones parte - todo. Esta teoría identifica tres tipos de procesamiento:

i) *Representacional*, la activación directa de representaciones verbales y no verbales.
ii) *Referencial*, la activación del sistema verbal por el sistema no verbal o viceversa.
iii) *Procesamiento asociativo*, la activación de representaciones dentro del propio sistema verbal al o no verbal, una tarea puede requerir en particular un tipo de procesamiento, o todos.

Es útil considerar algunos aspectos negativos de la visualización, Hoz (1981) se refiere a lo que denominó "rigidez geométrica", la cual ocurre, cuando el que aprende es incapaz de ver un diagrama de manera diferente, esta dificultad se agrava cuando la visualización se convierte en un símbolo para un objeto. Presmeg (1986) resume en un estudio realizado, estos tipos de dificultades:

1. La concreción de un caso de una imagen o diagrama puede atar el pensamiento a detalles irrelevantes o incluso, puede introducir datos falsos.
2. Una imagen de una figura estándar puede inducir el pensamiento inflexible, el cual impedirá el reconocimiento de un concepto en un diagrama no estándar.
3. Una imagen incontrolable puede persistir, impidiendo por lo tanto, la apertura de avenidas de pensamiento más fructíferas (esta dificultad es particularmente aguda si la misma es viva).
4. Especialmente si son vagas, es posible que las imágenes que no se acoplen a los procesos de pensamiento analítico riguroso sean inútiles.

Esta claro que estas dificultades en la visualización pueden conducir a errores en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, pero esto no invalida su eficacia y su potencia en el mismo, tanto en el trabajo creativo como en los procesos de comunicación y transmisión. De aquí que la realización de la visualización de modo correcto, de manera tal que sea un proceso verdaderamente provechoso requiere una preparación previa, una educación que no muchos matemáticos son capaces de transmitir, unas veces porque no son conscientes de lo que tal proceso verdaderamente conlleva de convención, de tradición, de familiaridad con ciertos códigos en ninguna parte escritos. Y éste es uno de los aspectos en los que la comunidad matemática actual debería poner un énfasis especial.

Entre las definiciones dadas sobre visualización se encuentra: *"La Visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de materiales o tecnologías) y utilizar estas imágenes de manera efectiva para el descubrimiento y la comprensión matemática"* (Zimmermann; Cunningham, 1991). Se asume esta definición porque incluye a la Visualización como **ilustración** (plano externo) y como **producto de la imaginación del individuo** (plano interno) y además no se restringe a situaciones típicas determinadas.

Por otro lado Bishop (1989) distingue entre **la habilidad para el procesamiento visual** y **la interpretación de información figural**, se comparte este criterio, pues evidentemente no son la misma cosa, así para fundamentar este acerto subraya que *"esta habilidad (la primera) involucra la visualización y la traducción de relaciones abstractas e información no figural en términos visuales. También incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales. Es una habilidad de proceso y no se relaciona con la forma del estímulo material presentado".*

Además, para hacer un uso adecuado de la Visualización en el proceso docente hay que tener en cuenta algunos criterios diferenciadores que se derivan del análisis realizado, entre los cuales se encuentran:

- El proceso de visualización es netamente individual.
- No todas las personas tienen las mismas posibilidades para la memoria gráfica.
- Que la preferencia por los procedimientos algebraicos y visuales no son las mismas en cada estudiante.
- La necesidad de que las incursiones a los recursos visuales sea sistemático, lo que si queda claro es que hay que darle la oportunidad al alumno que prefiera y tenga aptitudes, en el trabajo con medios visuales.

Lo anterior deja bien claro la conveniencia de ejercitar la capacidad de visualización y de entrenar a quienes se quieren introducir en la actividad matemática, en el ejercicio de la visualización, pues la misma es muy útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este trabajo se introduce una forma de trabajar con el ordenador como apoyo de visualización y de cálculo. Se ejemplifica con el sistema Cabri Geometre.

Según Guzmán (1996) cuando una persona con conocimientos de Geometría trata de resolver problemas inusuales, en un ambiente basado en la computadora, muestra que la evidencia visual juega un papel importante en el proceso de la resolución, pues:

- La evidencia visual es interpretada en términos geométricos y genera cuestiones que son resueltas por medio de la Geometría.
- El análisis geométrico detona nuevas preguntas las cuales son, en un primer paso, empíricamente exploradas, ocasionando experimentos con el software.

Pero el hecho de que los resolutores generen numerosas preguntas a partir de la evidencia visual es probablemente debido a su experiencia matemática lo cual les posibilita interpretar en términos geométricos lo que ellos observan.

La pregunta que se dirige aquí es cómo se deberá diseñar las situaciones problema que ameriten una interacción entre los métodos visuales y los métodos geométricos de tal manera que estimulen el aprendizaje de la Matemática. Además del uso de los fenómenos visuales como un catalizador para generar preguntas matemáticas, las tareas deben ser establecidas de tal manera que permitan también que el estudiante construya una conexión entre aspectos visuales y teóricos de la Matemática.

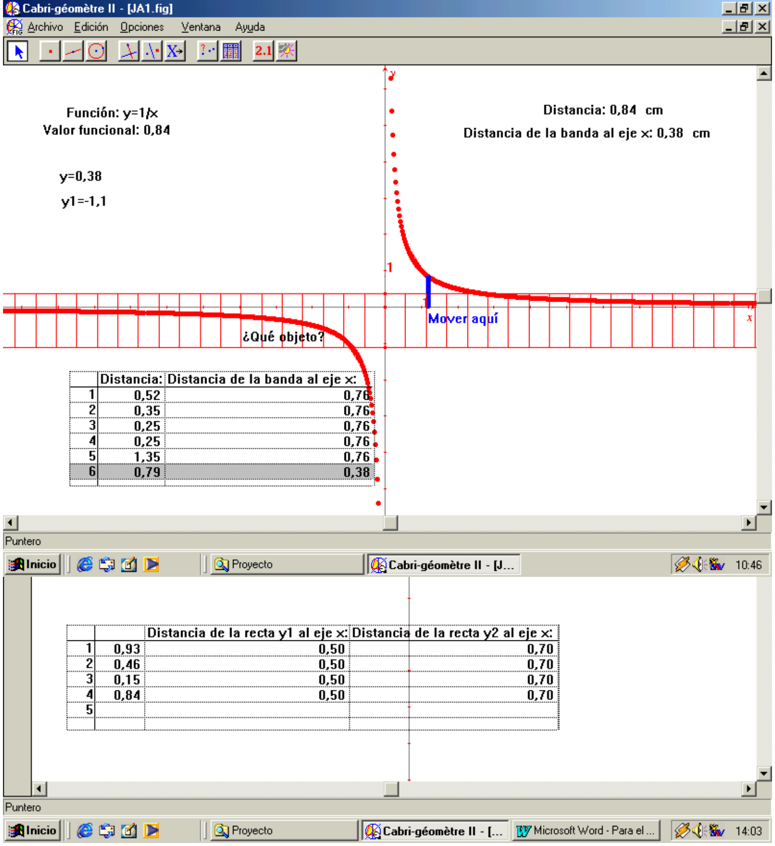
La Visualización se puede considerar al ejecutarse como un cambio de representación semiótica, R. Duval (1999), plantea: "Las transformaciones matemáticas no pueden efectuarse independiente de un sistema semiótico de representación. Esta función de representación sólo la pueden cumplir las representaciones semióticas y no las representaciones mentales". Además destaca, *"la coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes en absoluto es espontanea. Un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de sistemas de representación, parece favorecer tal coordinación, cuando se propone tal tipo de trabajo, se constata una modificación en las iniciativas y en los intentos de los alumnos para efectuar las transformaciones matemáticas, para controlarlas y para que la ejecución sea rápida; igualmente se observa que aumenta el interés por la tarea".* Esta coordinación de registros la llama este autor*, " conversión".*

La conversión necesita la identificación de las unidades significantes en uno y otro sistema de representación, la dificultad de la conversión puede estar precisamente en esta identificación que es absolutamente necesaria para el aprendizaje, la no discriminación puede hacer que para el estudiante pierda totalmente el sentido el tratamiento que realiza en la escritura algebraica, así Duval (1999) llega a la conclusión de que *"la discriminación de las unidades significantes propias a cada registro, debe ser el objeto de un aprendizaje específico".*

De esta manera queda justificado teóricamente que cualquier acercamiento visual o geométrico a un concepto no geométrico necesita al final o de manera paralela la conversión entre los registros gráficos y los simbólicos – analíticos.

A continuación se muestran ejemplos donde se utiliza el programa de Geometría Dinámica Cabri Geometre.

En el primer ejemplo se ilustra como a partir de consideraciones gráficas se puede inducir al alumno las primeras ideas sobre el concepto de *límite al infinito*. Para ello se seleccionó la función y = 1/x, se traza su gráfico y a partir de las opciones que brinda el Cabri el estudiante puede trazar bandas horizontales que contienen al eje **"x"**, él se percatará que para cualquiera de las bandas trazadas se cumple que existe un punto del gráfico de la función en el cual este penetra en la banda y se mantiene dentro de ella tanto en la dirección positiva del eje como en la negativa, paralelamente se muestra en el display las distancias sucesivas de los puntos del gráfico de la función al eje "**y"** y se van comparando con la amplitud de la banda, esto le brinda la posibilidad al alumno de establecer un paralelo entre el comportamiento geométrico de la curva y el comportamiento de los valores funcionales (sus distancias al eje), es decir, el alumno es capaz de comprender una relación entre valores numéricos a partir de la relación geométrica entre curva y recta. El alumno puede percatarse que la única recta para la cual es posible el comportamiento anterior es y = 0



El segundo ejemplo, cumple una función importante en el sentido de que muestra que si el comportamiento geométrico no se cumple como en el primero, entonces la relaciones cuantitativas entre los valores funcionales y el número que caracteriza la recta tampoco se conservan, en efecto, al escoger la función seno, se observa particularmente que si se toman bandas que incluyen la recta y = 0, el gráfico de la función puede estar totalmente contenido o entrar y salir de ella a medida que la variable independiente tome valores en cualquier sentido.

Se puede afirmar que después de ejecutar el procedimiento descrito, el estudiante está en condiciones de separar las regularidades en el comportamiento geométrico de las curvas en relación con su ubicación dentro de las bandas a partir de cierto punto y su ubicación por encima o por debajo de cualquier recta paralela al eje **“x”**, con posibilidades para discernir además el sentido (positivo o negativo) en que se produce. Las regularidades que se pueden separar son las siguientes:

- El gráfico de la función está totalmente incluido en cualquier banda horizontal que contiene a la recta y = l, a partir de cierto punto determinado por cada banda y el gráfico, en un sentido específico.
- El gráfico de la función está por encima de cualquier recta paralela al eje **“x”.**
- El gráfico de la función está por debajo de cualquier recta paralela al eje **“x”.**

El objetivo principal, al cumplirse cada una de las fases del proceso es precisamente, la separación de los rasgos determinantes de la relación que se establece entre gráfico y recta, la que resuelve desde el punto de vista cognitivo las ideas ambiguas en relación con la proximidad o aproximación entre una curva y una recta que puede tener el alumno al comenzar el aprendizaje del concepto de límite al infinito.

Si se asume que cuando el gráfico de una función respecto a la recta y = l, posee la primera regularidad en el sentido positivo del eje **“x”**, dicha función tiene límite l cuando la variable independiente “*tiende al infinito positivo*”, entonces el alumno es capaz de comprender y dar por si solo la siguiente descripción conceptual *“la función f tiene límite l cuando la variable independiente tiende al infinito positivo si en toda banda horizontal, que incluye la recta y = l, el gráfico de la función está contenido en la banda a partir de un punto determinado por la banda y el gráfico, en el sentido positivo del eje de las abscisas”.* De forma análoga se puede conducir al alumno a la descripción conceptual de “*función infinitamente grande*” en una semirrecta o sobre toda la recta real, sobre la base de satisfacer las otras dos regularidades.

La conversión necesaria a registros simbólicos - analíticos conducirá definitivamente a la elaboración conceptual, la ganancia conceptual queda garantizada con la plena identificación de las diferentes unidades significantes en uno y otro registro, lo que en la alternativa elaborada es fácil de identificar, así:

- “Si en toda banda horizontal”, se identificará con el “para todo” ε en el registro analítico- simbólico.
- “a partir de un punto determinado por la banda y el gráfico” le corresponde el “existe A”
- “variable independiente tiende al infinito positivo” se corresponde con $\lim\limits_{x \to +\infty}$
- “que incluye la recta y = l, el gráfico de la función está contenido en la banda” queda representado por $|f(x)-l| < \varepsilon$ cuando x >A.

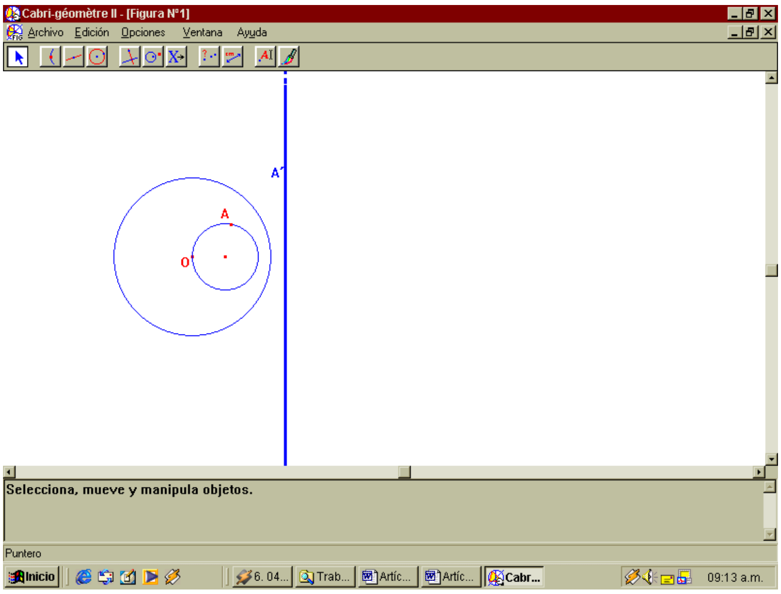
Que el alumno identifique este paralelismo es la garantía de que reconozca aquellas invariantes en uno y otro registro, lo que constituyen la señal de que se ha producido desde este punto de vista la elaboración conceptual.

Por último, se presenta un ejemplo donde el alumno luego de determinar la imagen A´ de un punto A de una circunferencia que pasa por el centro de inversión, observa que de mover el punto A de modo que recorra todos los puntos de la circunferencia se obtiene como imagen una recta, y por lo tanto puede conjeturar que: ***“la imagen de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta”***

En este mismo ejemplo, luego de esta conjetura, se le pidió lo siguiente:

1. Determina el punto de intersección entre la recta que pasa por el centro de inversión y el centro de la circunferencia c_1 y la recta imagen que obtuvieron.
2. Determina la amplitud del ángulo formado. ¿A qué conclusión pudieras arribar?

Con estas actividades complementarias el estudiante puede arribar a la conclusión de que estas rectas son perpendiculares, aspecto que se demuestra posteriormente.



<u>Conclusiones</u>

La Visualización como herramienta permite una objetivación inmediata del conocimiento y una utilización plena de la inducción, lo que facilita en el alumno de pocos recursos conceptuales una vía más clara hacia la formación del concepto.

En el trabajo realizado se esclarecen las posibilidades que brinda el desarrollo del pensamiento visual en el aprendizaje de la Matemática en general. En la literatura consultada se pone de manifiesto que la explotación de este recurso didáctico es aún no sistemático a nivel mundial y en nuestro país, debido a prejuicios sobre esta forma de pensamiento entre maestros y estudiantes, lo que en ocasiones se convierte en rechazo. No es práctica sistemática del alumno la creación de “Visualizaciones” que los conduzcan a la solución de un problema, a la exploración conceptual, etcétera. No obstante, el desarrollo tecnológico es tal que a pesar de los criterios señalados el uso de los medios visuales gana cada día más adeptos y su incorporación a la práctica de la docencia es cada vez más masiva, aun cuando quedan por aclarar aspectos de diversa índole.

Se ejemplificó la elaboración del concepto de límite al infinito a partir de consideraciones puramente geométricas, lo que se puede hacer para otros conceptos no menos importantes en el Análisis Matemático tales como: continuidad, derivada, integral definida, etcétera. Un aspecto no abordado en el trabajo y sobre el cual los presupuestos asumidos pueden tener importantes implicaciones son las posibles variantes curriculares que se puede introducir al proyectar un curso de Cálculo con estos enfoques y una utilización plena de los ordenadores, lo que pudiera ser la continuidad más lógica de esta investigación.

El uso de las consideraciones geométricas en la elaboración conceptual a semejanza como se propone en el trabajo, no niega que en otra situación cognitiva del alumno se utilicen simultáneamente varios sistemas de representación semiótica, es decir, cada planteamiento geométrico se traduzca a lo simbólico analítico y viceversa teniendo en cuenta la coordinación de registros según la identificación previa de las unidades significantes en cada uno de ellos.

La fundamentación realizada en el trabajo sobre la Visualización como cambio de representación semiótica constituyó el eslabón que hacía falta para asentar sobre una base sólida su uso como procedimiento didáctico pues muchas investigaciones sobre esta temática no aclaran la función cognitiva del cambio representacional, así el docente puede explotarla con conocimiento de causa y no de manera empírica o por intuición.

Bibliografía

Bishop, A, (1989). Implicaciones didácticas de la investigación sobre Visualización. Revista de investigación sobre la visualización en Matemáticas. Universidad de Cambridge. UK.

Cunningham, S. (1994). Some estrategies for using visualization in Mathematics teachiang. In: International review on Mathematics

Chávez, R, H. y García, F, R (1995). El concepto de función y el uso de la microcomputadora para el reforzamiento y/o modificación de la imagen conceptual. Mérida. Yucatán México.

Delgado, G, C. (1994). Sobre la enseñanza del concepto de límite. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol 3, número 2, Mayo. Cali.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1991). On visual versus analytical thinking in Mathematics. In: tenth international conference on psichology of Mathematics Education. PMF 10. Proccedings. London University.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle. Cali

Einsenberg,T: (1994). On understanding the reluctance to visualize. In: International review on Mathematics. ZDM.

Guzmán, M. (1996). El rincón de la pizarra. Pirámide, Madrid.

Hernández, J.A. (2000). La visualización como alternativa didáctica en la enseñanza del Cálculo Infinitesimal. Tesis de Maestría. ISP "José de la Luz y Caballero, Holguín, Cuba.

Hoz, R. (1981). The effects of rigidity on school geometry learning. In: Educational Studies in Mathematics 12. London.

Larkin, J, H. y Simon, L, A. (1989). Why a Diagram is (sometimes) worth ten thousand words. In: connitive science 11.

Majmutov, M, I. (1983). Enseñanza Problémica. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Negrón, S, C. (1998). Propuesta de integración de los marcos geométrico, numérico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Tesis de Maestría. ISP "José de la Luz y Caballero, Holguín, Cuba.

Paivio, A. (1986). Mental representations: a dual coding aproach. Oxford University Press. URL. http://tip.psychology.org/index.html

Placencia, C., Espinel, C. y Dorta, A. (1999). Kevin un alumno visualizador. En: Cultura y Educación. España.

Presmeg, N, C. (1986). Visualizations and Mathematical gifedness. In: Educational Studies in Mathematics 17. New York.

Presmeg, N, C. (1994).The role of visually mediated processes in clasroom mathematics. International review on Mathematics. ZDM.

Tall, D. (1994). Cognitive difficulties in learning Analysis.

Tall, D. (1990). Recent development in the use of computers to visualize and symbolize calculus concepts. University of Warwick. University of Warwick. URL: http://www.uoc.es/web/esp/index.html

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and concept definition in Mathematics with particular reference to limit and continuity. University of Warwick. URL: htp://www.uoc.es/web/esp/index.html

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? In: MAA Notes.