Sobre la no contradiccion de la geometría de lobatchevski.

Autor: Mario Estrada Doallo

Resumen.

En el presente artículo se aborda el problema de la no contradicción de la Geometría de Lobatchevski, donde se analiza, de forma muy breve, el trabajo de algunos de los matemáticos que trabajaron en esta dirección y se hace un análisis de los beneficios de esta rama de la Matemática para el desarrollo de la Matemática y de la ciencia en general.

Summary.

Presently article is approached the problem of the non contradiction of the Geometry of Lobatchevski, where it is analyzed, in a very brief way, the work of some of the mathematicians that worked in this address and an analysis of the benefits of this branch of the Mathematical one is made for the development of the Mathematical one and of the science in general.

Introducción.

La fiebre que se originó por reducir el sistema de axiomas de Euclides, llevó a los geómetras directamente al V Postulado y aunque las investigaciones relativas al mismo son tan antiguas como los Elementos, estas no culminaron hasta cerca del siglo XIX con importantes descubrimientos. Es posible que el propio Euclides tratase de demostrar el V Postulado, pues él utilizó el mismo en la demostración de la proposición 29 de su libro. El problema consistía en que los matemáticos se dieron a la tarea de probar que este postulado era un teorema, es decir, que era demostrable a partir de los restantes postulados y axiomas.

Desde Euclides hasta fines del siglo XIX el problema del V Postulado era uno de los más populares de la Geometría. Durante más de veinte siglos se propusieron muchas "*demostraciones*" diferentes de dicho postulado. Todas eran, sin embargo, equívocas.

En este largo período de tiempo no existieron las condiciones internas dentro de la

Matemática para poder llegar a conclusiones válidas sobre la imposibilidad de la demostración del V Postulado a partir del resto de los axiomas y postulados formulados por Euclides, pues desde el punto de vista subjetivo la mayoría de los matemáticos no se percataban del uso de proposiciones equivalentes y de sus errores en las diferentes demostraciones que hacían, además reinaban las concepciones filosóficas idealistas y otros resultados contrarios a los de Euclides eran inaceptables por la sociedad científica de estas épocas. Es decir, antes del siglo XIX no estaban creadas las condiciones internas y externas para el surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

En el siglo XIX tres matemáticos llegaron con sus trabajos a la Geometría No-euclideana y ellos fueron F. Gauss, J. Bolyai y Nikolai Ivanovich Lobatchevski (1793-1856); sin embargo, el mérito de tal descubrimiento recae sobre este último, quien el 11(23) de febrero del año 1826 en la reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán expuso su obra con una conferencia y por primera vez informó de los resultados de sus investigaciones sobre la teoría de las paralelas, bajo el nombre de ***"Exposición breve de los fundamentos de la Geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas"***; este día se puede considerar como el certificado de nacimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

Un aspecto que ocupó a Lobatchevski toda su vida y que no pudo dar respuesta de manera categórica, fue el problema de la no contradicción de su Geometría, es decir, para establecer la no contradicción del sistema geométrico que había creado era necesario demostrar con el mayor rigor, que ningún desarrollo de este sistema podía conducir a una contradicción. De aquí, que sus adversarios mantenían que toda la Geometría de Lobatchevski era pura fantasía e indigna de la menor atención. Es precisamente el objetivo de este artículo abordar de forma breve y diáfana cómo se “demuestra” la no contradicción de esta Geometría.

Desarrollo.

Los primeros en convertir la fantasía de la Geometría de Lobatchevski en realidad fueron Eugenio Beltrami (1835-1900) y Félix Klein (1849-1925).

La solución de este problema se basa en la Geometría Interior de superficies, concepto introducido por Gauss en 1824, el cual se puede definir de la siguiente forma:

"Es la parte de la Geometría que se ocupa de aquellas propiedades de superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie."

Beltrami en su estudio demostró que existe en el plano de Lobatchevski una métrica determinada por cierta forma diferencial cuadrática y con dicha métrica es posible hacer la medición de las magnitudes de las líneas sobre el plano de Lobatchevski. Y logró determinar las fórmulas para encontrar el ángulo entre dos líneas y el área de una región sobre el plano de Lobatchevski, donde sus formas son análogas a las del plano euclidiano, pero en coordenadas beltramianas.

Fue entonces donde Beltrami planteó en su obra *"Experiencia de la interpretación de la Geometría No-Euclidiana"* (1868), los dos problemas siguientes:

1. Hallar una superficie, para cada punto de la cual existe un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobatchevski. Es decir, que exista la superficie y se verifique la Geometría del plano de Lobatchevski de forma "local" sobre esta superficie.
2. Hallar una superficie que admita su aplicación isométrica sobre todo el plano de Lobatchevski; es decir, que exista la superficie y se verifique toda la Geometría de plano de Lobatchevski sobre esta superficie.

La solución del segundo problema conduciría directamente a la consistencia lógica del sistema no euclidiano bidimensional. Beltrami resolvió el primero, pero al segundo no pudo darle respuesta. Más tarde, Hilbert demostró en el año 1901, que en el espacio de Euclides no existe una superficie que tenga la propiedad requerida, es decir, no existe superficie analítica de curvatura constante negativa que no tenga singularidades en ninguna parte y que sea en todas partes regular. Por esto, llevar a cabo una interpretación del tipo Beltrami en todo el plano de Lobatchevski es imposible.

Del trabajo hecho por Beltrami se pudo concluir que:

- ✓ *Cualesquiera que sean dos superficies de una misma curvatura constante, cada porción suficientemente pequeña de cualquiera de ellas pueden ser aplicada isométricamente, sobre cierta porción de la otra.*
- ✓ *Dos superficies de curvatura constante igual localmente, tienen Geometría Interior igual.*

A pesar que Beltrami no resolvió el segundo problema sus investigaciones revistieron una gran importancia de principio. Primero, una realización parcial de la planimetría de Lobatchevski en el espacio euclidiano cambió la actitud escéptica de los geómetras ante las obras de Lobatchevski; por lo tanto, sus investigaciones jugaron un papel importante en el desarrollo general de la ciencia. Segundo, gracias a sus estudios, la planimetría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann resultaron unidas en un esquema geométrico diferencial general. Todos estos sistemas geométricos se realizan sobre una superficie de curvatura constante k y corresponden a los casos $k=0$, $k<0$ y $k>0$. Aquí se percibe la *transformación de la cantidad en calidad*. Una pequeña variación alrededor de 0 de la cantidad k hace pasar de un espacio esférico a un espacio euclidiano o de Lobatchevski, es decir, de un espacio en el que dos rectas no son jamás paralelas, a uno donde se pueden trazar por un punto una infinidad de paralelas a una recta dada.

La siguiente interpretación de la Geometría No-Euclidiana que realizara en el año 1871 F. Klein en el trabajo *"Sobre la llamada Geometría No-Euclidiana"* se basa en la definición de medida proyectiva en el plano, introducida por Cayley en el año 1859 en la obra *"Sexta Memoria sobre las Formas"*; además, Klein se basó en el concepto de grupo que él introdujo en la Geometría; sus nuevos puntos de vistas sobre las Geometrías los expuso en el famoso Programa de Erlangen, este discurso jugó un papel capital en la génesis de las ideas sobre la esencia de la Geometría, principalmente para dilucidar el lugar que ocupa la Geometría de Lobatchevski.

Las ideas de Klein se basaron en el conjunto de los desplazamientos del espacio que constituyen un grupo de aplicaciones. Su concepción estuvo basada en la Geometría Métrica que permite desplazamientos tales que cada punto puede llevarse en coincidencia con cualquier otro punto; en este caso el grupo de desplazamientos de esa Geometría se dice que es transitivo. En otras palabras, el conjunto de aplicaciones que forma este grupo conserva la distancia entre los puntos. Por otra parte, Sophus Lee mostró que no puede haber más que tres sistemas de Geometría Métrica fundados sobre el desplazamiento, es decir, la Geometría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann.

Klein y Lee basados en la Geometría Proyectiva construyeron un modelo para la Geometría No-Euclidiana y para el cual se tomó el círculo fundamental. En este modelo se verifica en forma absolutamente irreprochable la Geometría Hiperbólica para dos dimensiones. La aplicación del espacio hiperbólico en el interior de la esfera euclidiana se hace de manera análoga. Toda contradicción en la Geometría Hiperbólica, si se llegase a descubrir, significaría que existe otra análoga a la Geometría Euclidiana. Luego la Geometría Hiperbólica es lógicamente verdadera como la Geometría Euclidiana. El modelo de Klein, resultó la demostración completa, largamente esperada de la no contradicción de la Geometría de Lobatchevski y la existencia para ella de un sentido real.

Lobatchevski con este descubrimiento aportó nuevas ideas en el desarrollo de la Geometría, sus méritos van mucho más allá del hecho de que haya arrancado el velo del misterio milenario del axioma del paralelismo; con su análisis crítico del axioma de las paralelas, dio comienzo a la revisión de algunas posiciones iniciales del sistema de Euclides, hecho que condujo posteriormente a la elaboración de principios rigurosamente científicos de construcción axiomática de la Geometría y otras ciencias matemáticas.

Dicha Geometría encontró aplicación directa, en la teoría de las integrales definidas, donde Lobatchevski halló más de 200 fórmulas nuevas para el cálculo de las mismas.

Sin su descubrimiento, no hubiera sido posible desarrollar la teoría de la relatividad, uno de los mayores alcances de la Física contemporánea. Partiendo de sus investigaciones se construyó una teoría que permite efectuar el cálculo de los procesos que transcurren en el interior del núcleo atómico (Smogorzhevski, 1978).

Con su descubrimiento, retornó la Geometría a las posiciones del materialismo ya que antes y durante muchos siglos reinó en la Geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, negando la procedencia experimental de los axiomas. En sus obras expresó de forma explícita sus posiciones materialistas, por ejemplo, en su obra "*Sobre los Elementos de la Geometría*" (1929), expresó: *"Los conceptos primarios deben ser claros y reducidos a la mínima cantidad. Sólo entonces estos pueden proporcionar una base sólida y suficiente para la teoría. Tales conceptos se adquieren por medio de los sentidos, los conceptos innatos son inaceptables"*. De esta forma rechazaba la tesis Kantiana de que nuestras representaciones espaciales son innatas y no tienen un origen empírico.

Lobatchevski hizo un gran aporte a la elaboración de las nociones científicas referentes al nexo del espacio y el tiempo con la materia en movimiento. Demostró que las propiedades del espacio no son inmutables, iguales siempre y en todas partes, sino que cambian en dependencia de las propiedades de la materia y de los procesos físicos que tienen lugar en los cuerpos materiales (Konstantinov et al., 1978).

Antes de su Geometría se consideraba a la Geometría de Euclides la única teoría imaginable del espacio, su descubrimiento destruyó este punto de vista. Esto marcó el comienzo de profundas generalizaciones de los enfoques de la Geometría y su finalidad, que condujeron al concepto moderno de espacio abstracto con sus múltiples aplicaciones en la propia Matemática y en disciplinas afines. De manera que 80 años después del nacimiento de Lobatchevski, la no contradicción de la Geometría que él había creado, prácticamente, no se ponía en duda. El problema que le había ocupado toda su vida se encontraba del todo resuelto.

CONCLUSIONES.

El surgimiento de las Geometrías No-Euclidiana fue una de los descubrimientos que no sólo asombró a los contemporáneos, sino a las siguientes generaciones, a unos por lo excepcionalmente inesperado de los resultados y a otros por el profundo entusiasmo y sacrificio dedicado a la investigación incesante y el grado de independencia y audacia en el pensamiento creador.

Este resultado es el cambio cuantitativo que se transforma en un cambio cualitativo en toda la concepción de la naturaleza, del conocimiento científico. Se puso en crisis la metodología de la Matemática y se impulsó una revolución en toda la ciencia y la filosofía imperante en el siglo XIX.

El descubrimiento y demostración de la no contradicción de esta Geometría tuvo un significado enorme y multifacético, pues:

- ✓ Resolvió "*el problema de las paralelas*", tan antiguo como la propia Geometría.
- ✓ Permitió el avance revolucionario de la ciencia y especialmente de la Física del siglo XX; sin ella no hubiera sido posible el descubrimiento de la Teoría de la Relatividad.
- ✓ Los axiomas dejaron de ser resultados evidentes que no necesitan demostración, para convertirse en aquellas proposiciones de la teoría, las cuales en una construcción determinada de la misma, se toman como punto de partida, independientemente de que sean simples, evidentes o intuitivamente claros para todos. El método axiomático así concebido permite estructurar los fundamentos de cualquier otra región del saber, no cumpliendo sólo una función organizadora, sino, heurística y de ahí la consideración de su universalidad en la ciencia.
- ✓ Su aceptación sirvió de punto de partida y estímulo fundamental para una de las más profundas revoluciones en las concepciones sobre los problemas filosóficos de la Matemática, en las representaciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático. La propia historia de la aceptación de las Geometrías No-Euclidianas en el siglo XX es un ejemplo de atraso de la concepción filosófica en relación con el desarrollo del contenido de la ciencia.

Las dos tendencias imperantes al surgir las Geometrías No-Euclidianas, el empirismo de los materialistas franceses que absolutizaban la experiencia como fuente necesaria del conocimiento y los racionalistas de Enmanuel Kant que aseguraban el apriorismo de los postulados de Euclides y la concepción metafísica del espacio como cierta esencia invariable, no respondían a los fundamentos de esta nueva Geometría. En última instancia estas Geometrías confirmaron la visión dialéctica del espacio como forma de existencia de la materia, forma susceptible de cambiar a la vez que cambia la materia (Sánchez, 1985).

- ✓ En el plano gnoseológico esto permitió fundamentar con todo rigor la cuestión de la Geometría real del mundo. Las confirmaciones experimentales de la teoría general de la relatividad han demostrado que el espacio real tiene estructura Riemanniana y que la métrica euclidiana del espacio sólo se manifiesta en recintos muy pequeños, donde las Geometrías Euclidianas y No-Euclidianas coinciden. La experiencia ha demostrado igualmente que las relaciones métricas en el micromundo no son euclidianas (Sánchez, 1985).

La comprensión cabal de las Geometrías No-Euclidianas se debe a la teoría marxista leninista del conocimiento. Y como dijera Lenin: *“el pensamiento que se eleva de lo concreto a lo abstracto – siempre que sea correcto – no se aleja de la realidad sino que se acerca a ella. Todas las abstracciones científicas (correctas, serias, no absurdas) reflejan la naturaleza en forma más profunda, veraz y completa. De la percepción viva al pensamiento abstracto y de este a la práctica tal es el camino dialéctico del conocimiento de la verdad, del conocimiento de la realidad objetiva”*.

El surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas, a parte de sus enormes significados (anteriormente analizados), ratificó que contra los demoledores golpes de las profundas revoluciones, que sin piedad derrumban las "inexpugnables fortalezas" de las tradiciones, siempre se alzan *"los gritos de los Beocianos"*, se alzan los timoratos, los que temen perder su acomodaticia posición. Pero es que las revoluciones también en la ciencia como en la sociedad, nada ni nadie las puede impedir. Y el descubrimiento de las Geometrías No-Euclidianas fue una de las más grandes revoluciones en el dominio del pensamiento humano, una de las más radicales que conoce la historia de las ciencias (Sánchez, 1985).

BIBLIOGRAFIA.

BLUMENTHAL, L (1975): *Geometría Axiomática*. Ediciones Madrid S.A. España.

BONOLA, R. (1951): G*eometrías No-Euclidianas*. Espasa-Calpe Argentina S.A. Buenos Aires.

CASANOVA, G. (1965): *La Matemática y el Materialismo Dialéctico*. Editorial del Consejo Nacional de Universidades, La Habana.

EFÍMOV, N.V. (1984): *Geometría Superior*. Editorial Mir. Moscú.

ESTRADA, M. (1995): *Surgimiento de la Geometría de Lobatchevski*. Trabajo Final de Historia de la Matemática. Maestría en Didáctica de la Matemática. ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

ESTRADA, M. (2003): *Del V Postulado a las Geometrías no Euclideanas.*. Ponencia. Cambio de Categoría. ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

FLORES, A. Y R. REGUERA. (1978): *Geometría. Selección de Temas*. Libros para la Educación. Ciudad de la Habana.

KAGAN, V. (1984): *Lobatchevski*. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana. 1984.

KONSTANTINOV, F. et al. (1978): *Fundamentos de Filosofía Marxista Leninista (Parte 1). Materialismo Dialéctico*. Editorial de Ciencias Sociales, La Habana.

RIVNÍKOV, K. (1987): *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscú.

SÁNCHEZ, C. (1985): *Discurso a la Memoria de un Genio Revolucionario: Janos Bolyai*. En: Boletín de la SCM. Ciudad de la Habana.

SÁNCHEZ, C. (1987): *Conferencias sobre Problemas Filosóficos y Metodológicos de la Matemática*. Facultad de Superación en Ciencias Naturales. Universidad de la Habana. Ciudad de la Habana.

SMOGORZHEVSKI, A. S. (1978): *Acerca de la Geometría de Lobatchevski*. Editorial Mir. Moscú.

TURNBULL, H.W. (1984): *Grandes Matemáticos*. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana.

WUSSING, H. (1989): *Conferencias sobre Historia de la Matemática*. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.