

La prueba de hipótesis Kolmogorov-Smirnov para dos muestras grandes con una cola ***The test of hypothesis Kolmogorov-Smirnov for two big samples with a queue***

* Arabel Moraguez-Iglesias

** Mabel de Pilar Espinosa-Torres

*** Lourdes Morales-Peralta

* Universidad de Holguín. Graduado del Profesorado Superior de Física. Ingeniero Mecánico. Profesor Auxiliar. Máster en Planeamiento Administración y Supervisión de Sistemas Educativos. arabelm@uho.edu.cu

** Universidad de Holguín. Ingeniera Mecánica. Licenciada en Mecánica. Máster en Ciencias. Profesora Auxiliar. Doctora en Ciencias Pedagógicas. Vicedecana de pregrado de la Facultad de Ingeniería. espinosa@uho.edu.cu

*** Universidad de Holguín. Asistente. Máster en Ciencias de la Educación. Jefa del colectivo interdisciplinario de la carrera de Eléctrica. lourdesmp@uho.edu.cu

Resumen

Este artículo tuvo la finalidad de mostrar cómo mediante la aplicación adecuada de las pruebas de hipótesis, -en especial la Kolmogorov-Smirnov para dos muestras grandes cuando se trabaja con una cola-, el investigador pudo determinar la pertinencia de la hipótesis de una investigación con un determinado nivel de confianza, que es asumido por este. De los métodos empleados los más significativos de los teóricos fueron el análisis-síntesis y la inducción-deducción; como método empírico, la utilización de los resultados en tablas tomadas de la tesis doctoral de Pupo (2006) a través de: encuestas, entrevistas, aplicación de pruebas, entre otras y por supuesto el método estadístico, entre otros, de los que se destaca la prueba de hipótesis antes mencionada, lo que posibilitó validar, con un mayor grado de confianza, la investigación objeto de estudio.

Palabras clave: estadística, hipótesis; Kolmogorov; prueba de hipótesis; prueba; Smirnov; tesis doctorales; tesis maestrías

Abstract

This article is aimed at showing how by means of the appropriate application of the hypothesis tests, -especially the Kolmogorov-Smirnov for two big samples, working with a queue-, the researcher could determine the relevancy of the hypothesis of an investigation with a certain assumed level of confidence. From the used methods, the most significant in the theoretical level were the analysis-synthesis and the inductive-deductive; as empiric method, the use of the results in taken charts of Pupo's (2006) doctoral thesis through: surveys, interviews, application of tests, and of course the statistical method, among others, including the mentioned test of hypothesis, which allowed validating, with a greater degree of confidence, the research study object.

Key words: statistic; hypothesis; Kolmogorov; hypothesis test; proves; Smirnov; doctoral thesis; thesis masters

Introducción

De todos es conocida la importancia que tiene en las investigaciones la utilización de las pruebas de hipótesis, como una vía para demostrar la factibilidad de las hipótesis planteadas en una investigación educativa que, en la práctica, por lo general, no son explotadas lo suficiente en las tesis doctorales y de maestrías, por lo que este artículo tiene como objetivo mostrar de una manera práctica, cómo utilizar la prueba de hipótesis Kolmogorov-Smirnov de dos muestras grandes para una cola en las investigaciones científicas defendidas en tesis doctorales y de maestrías de la Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero de Holguín, por lo que los autores asumen como referente la tesis doctoral de Pupo (2006) y toman como referentes teóricos los distintos clásicos de la Estadística, en especial los trabajos de: Freud, (1977), Siegel (1975), Montgomery y Runger (1996) y Devore

Recibido: 7 de octubre de 2014/Aceptado: 25 de mayo de 2015/Publicado: 1 de julio de 2017

(2000), entre otros, para explicar cómo aplicar el estadístico para la prueba de hipótesis Kolmogorov-Smirnov para dos muestras grandes para una cola, y demostrar que los resultados de un estado final fueron superiores a un estado inicial; o cuando se desea indicar que los resultados de un grupo experimental fueron superiores a los del grupo o grupos de controles.

Materiales y métodos

Para la elaboración del presente trabajo se utilizaron como métodos teóricos fundamentales: el análisis-síntesis, que permitió llegar a consenso en relación con el tipo de estadístico a aplicar; el inductivo-deductivo que posibilitó presuponer, con un determinado grado de significación, el rechazo o aceptación de la hipótesis planteada; el análisis de fuentes, que facilitó estudiar a los distintos clásicos de la Estadística: Siegel (1975), Montgomery y Runger (1996), Devore (2000), los materiales utilizados en el curso de estadística de Moraguez (2006-2012), entre otros, así como la tesis doctoral de la autora antes mencionada. Como método empírico, la utilización de los resultados en tablas tomadas de dicha tesis doctoral a través de: encuestas, entrevistas, aplicación de pruebas, entre otras, y el método matemático-estadístico, a través del empleo o aplicación de las pruebas de hipótesis, fundamentalmente la Kolmogorov-Smirnov para dos muestras grandes con una cola, que permitieron a los autores demostrar cómo se puede aplicar acertadamente esta herramienta estadística tan poderosa para validar hipótesis.

Resultado y discusión

Al decir de Siegel (1975), Montgomery y Runger (1996), Devore (2000) y Celorrio (2012), entre otros, el empleo de la Estadística es de gran importancia en la investigación científica, ya que esta requiere de algún tipo de análisis estadístico que posibilite evaluar sus resultados; criterio con el que coinciden los autores de este artículo. Para resolver un problema de carácter empírico, es preciso llevar a cabo un análisis bastante complejo; otras veces basta con efectuar un análisis muy simple y directo. La elección de uno u otro tipo de análisis estadístico depende del problema que se plantee en el estudio, así como de la naturaleza de los datos.

En la estadística se pueden estimar parámetros a partir de datos muestrales, sin embargo, con frecuencia el objetivo de una investigación no es estimar un parámetro sino determinar cuál de dos hipótesis contradictorias acerca del parámetro es la correcta. Los métodos para lograr esto comprenden la parte de la inferencia estadística que recibe el nombre de pruebas de hipótesis, Siegel (1975), Devore (2000) y Moraguez (2012).

Se comparte el criterio de Devore (2000) de que una hipótesis estadística o hipótesis es una expresión acerca del valor de una sola característica de población, o acerca de los valores de varias características de población que en el ámbito educacional, por citar un ejemplo, podría estar dada por la asunción de que los resultados de un grupo experimental, luego de aplicada determinada metodología de aprendizaje, resultaron superiores a otros grupos (grupo de control) que recibieron la enseñanza de forma tradicional.

¿En qué consiste una Prueba de Hipótesis?

Los autores consideran conveniente que en lugar de comenzar a dar definiciones matemáticas, -que para el lector que no conozca sobre el asunto le resulte incomprensible-, explicar cómo emplear, en general, cualquier prueba de hipótesis de las que establece la estadística; es por ello que se deben seguir los siguientes 8 pasos, (Montgomery y Runger, 1996, p.383):

1) Identificar los parámetros de interés

Se debe tener en cuenta el tipo de escala a que obedecen estos parámetros para con ello determinar el tipo de prueba de hipótesis a aplicar.

Veamos cómo se aplica este estadígrafo a través de un ejemplo tomado de la tesis doctoral de Pupo (2006):

La investigadora aplicó dos pruebas: la primera (pre-test) consistió en una prueba diagnóstico inicial con una serie de indicadores que permitieron evaluar el grado de conocimientos que traían los estudiantes en relación con aspectos de la Cultura Energética; la segunda, consistió en la aplicación de una prueba final que contemplaba los mismos objetivos que la prueba diagnóstico que permitiera establecer las diferencias de los resultados, en caso de existir, antes y después de la aplicación de la estrategia y metodología establecida.

Ambas pruebas fueron calificadas cualitativamente en base a: 2, 3, 4 y 5 puntos.

Primeramente se elabora una tabla de frecuencia absoluta, pero teniendo en cuenta ordenar la escala en orden creciente (se recomienda siempre hacerlo así).

Es importante contabilizar los resultados en el orden establecido para el estado “Antes” y Después” o “Diagnóstico Inicial” y “Prueba Final”, que representan los estados “antes” y “después” del estadístico, como se muestra en la tabla 1 siguiente:

	Tabla resultados observados				
	2	3	4	5	Total
Diag. Inicial	52	21	17	0	90

Prueba Final	2	26	55	7	90
--------------	---	----	----	---	----

Tabla 1 Fuente ¹

Nota: Se aclara que aunque en este problema aparecen las muestras tomadas iguales, esto no siempre puede ser así, ya que se pueden tomar tamaños indistintos; en el caso que una muestra sea grande y la otra pequeña, se debe considerar como muestras grandes.

2) Establecer la hipótesis alternativa

Recordar que la hipótesis alternativa es aquella hipótesis que se quiere demostrar y se denota por H_1 y otros autores la denotan por H_a . A esta se le asigna el grado de significación Alfa (error del Tipo I) y además determina el tipo de cola a trabajar.

Si por ejemplo se quiere demostrar que los resultados de un grupo experimental fueron superiores a los de un grupo de control (o varios grupos de control), se considera una dirección: los resultados, por ejemplo, de la media μ_2 del grupo experimental fueron superiores a los del grupo de control (o a la media del grupo de control) μ_1 ; luego se considera en esta hipótesis que $\mu_2 > \mu_1$, lo que indica que se trabajará con una cola, si ocurriera lo contrario se trabajaría con dos colas; por ejemplo, si los resultados del grupo de experimento son diferentes a los del grupo de control; ello infiere que los valores de la media $\mu_2 \neq \mu_1$ y por tanto pueden ser: $\mu_2 > \mu_1$ o $\mu_2 < \mu_1$, lo que indica trabajar con dos colas, (aspecto que no compete en este trabajo).

En el ejemplo tomado se tiene que la hipótesis alternativa se asumió como:

H_1 : Hipótesis alternativa, (lo que se desea demostrar): Los resultados de la prueba final, luego de aplicada la propuesta (después), **fueron superiores** al diagnóstico inicial de la muestra (antes).

Obsérvese que en este caso, como la hipótesis alternativa establece una dirección (**estado final mayor que estado inicial**), es por ello que **se trabaja con una cola**; por el contrario, si la hipótesis alternativa no estableciera una dirección: el estado final es diferente al estado inicial, se consideraría dos alternativas, debido a que si es diferente puede ser mayor o menor y por consiguiente se trabajará con dos colas, que no es el caso tratado en este artículo.

3) Establecer las hipótesis de nulidad

H_0 : Hipótesis de nulidad: Los resultados de la prueba final **fueron similares** al diagnóstico inicial de la muestra.

4) Seleccionar el Establecer el grado de significación estadística o nivel de confianza a asumir

¹ Pupo, Noemí. El desarrollo de la cultura energética en estudiantes de Secundaria Básica mediante una concepción didáctica. Anexo 6.

Luz. Año XVI. (3), pp. 80-92, julio-septiembre, 2017.

El grado de significación estadística o como algunos autores le llaman también nivel de significancia Montgomery y Runger (1996), Devore (2000), entre otros, no es más que considerar la probabilidad de cometer un error. Cuando se niega una hipótesis cierta, se comete un error del **Tipo I o Alfa (α)**; por el contrario, si se acepta una hipótesis falsa, entonces se incurre en un error del **Tipo II o Beta (β)**. En la estadística se trabaja preferiblemente las pruebas de hipótesis asumiendo cometer un error del **Tipo I**, es por ello que el grado de significación Alfa se da en términos probabilísticos en 0,05 (cuando se trabaja con el 95 % de confianza) o 0,01 (cuando se trabaja con un 99 % de confianza), lo que no impide que se puedan trabajar con otros.

En la figura 1 se representan las dos zonas de probabilidades en que se trabajan las dos hipótesis: obsérvese que el área de probabilidad asignada a la hipótesis de nulidad es mucho mayor (puede ser una probabilidad igual a 0,95); sin embargo, la probabilidad **Alfa (α)**, que se le asigna a la zona de rechazo y es a la que corresponde a la hipótesis alternativa (lo que deseo demostrar), es mucho menor (zona extrema derecha de la cola).

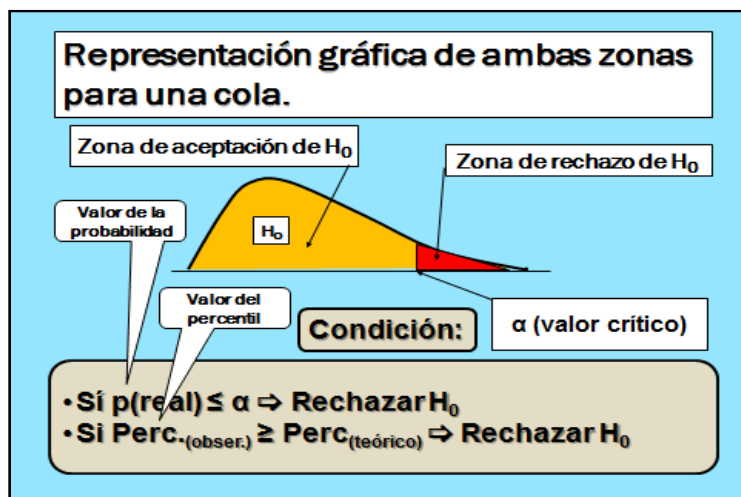


Figura 1

Acotando lo anterior, se ha establecido una dirección al considerar que los resultados finales fueron superiores al estado inicial.

Pupo (2006) consideró trabajar, con un 95 % de confianza (0,95), por consiguiente el grado de significación Alfa (α) es igual a 0,05; que es la probabilidad de cometer un error del tipo I (rechazar una hipótesis cierta).

Alfa (α) = 0.05 (Cometer un error del Tipo I: Negar una hipótesis cierta en un 5 %)

5) Establecer un estadístico de prueba necesaria

Para el caso que compete se aplicará la prueba de Hipótesis Kolmogorov-Smirnov para dos muestras grandes para una cola, por las siguientes razones:

5.1. Prueba de Hipótesis Kolmogorov-Smirnov para dos muestras grandes y una cola

Esta es una prueba de bondad de ajuste; esto es, se interesa en el grado de acuerdo entre la distribución de un conjunto de valores de la muestra (puntajes observados, que pueden estar en escala ordinal, de

intervalo o de razón) y alguna distribución específica. Determina si razonablemente pueden pensarse que los puntajes en la muestra provengan de una población que tenga distribución teórica. Es una prueba muy poderosa Devore (2000), Montgomery y Runger (1996), Siegel (1975), entre otros, recomendada cuando se desea comparar un estado inicial (antes) con un estado final (después).

Es importante acotar que esta prueba se aplica tanto para muestras pequeñas o grandes, para una o dos muestras y una o dos colas, constituyendo el objeto de estudio de este artículo trabajar para dos muestras grandes y una cola.

Se decide trabajar con este tipo de prueba por las siguientes razones:

- I. Es una prueba muy recomendada para utilizar con escalas ordinales o de intervalo, en este caso la escala es ordinal numérica por las evaluaciones: 2, 3, 4 y 5.
- II. Se utiliza para muestras grande cuando el tamaño de la misma excede de 40 elementos, Pupo (2006) tomó una de 90 estudiantes (tabla 1). Se establece que para muestras grandes ambas pueden tener el mismo o diferentes tamaños.
- III. Cuando se quiere demostrar que los resultados de un grupo experimental fueron superiores a los de un grupo de control o también comparando para un mismo grupo un estado inicial con otro final, que es el caso que compete.
- IV. Se trabaja con una cola porque se establece una dirección en la hipótesis alternativa: Los resultados del estado “Después” fueron superiores al estado “Antes”.

6) Establecer la región de rechazo para el estadístico

La condición de rechazo que establece esta prueba es la siguiente:

$$\text{Sí } X^2_{(\text{observado})} \geq X^2_{(\text{tabla}) (2; \alpha)} \Rightarrow \text{Rechazar } H_0 \text{ y aceptar } H_1$$

7) Calcular el estadístico correspondiente para la prueba de hipótesis adoptada

El estadístico $X^2_{(\text{observado})}$ se determinará mediante la siguiente expresión:

$$\chi^2_{(\text{observado})} = 4 * (D_t)^2 * \frac{n_1 * n_2}{n_1 + n_2} \quad (I)$$

Donde: D_t : Es el valor máximo absoluto de las diferencias de las frecuencias relativas acumuladas.
(Valor del estadístico que será determinado a continuación).

n_1 : Tamaño de la muestra del estado inicial.

n_2 : Tamaño de la muestra del estado final.

Si ambos tamaños son iguales entonces la expresión se puede expresar en términos de n_1 o n_2 , según considere el investigador.

Véase los pasos a seguir para este estadígrafo:

- a) Elaborar la tabla de frecuencias absoluta de los parámetros de interés, obsérvese la tabla 1, página 4.
- b) Calcular la matriz de frecuencia relativa acumulada (tabla 2), tomando como referente la tabla 1 anterior:

Frecuencias relativas acumuladas de los resultados observados				
	2	3	4	5
Diag. Inicial: $S_{(X1)}$	0.578	0.811	1.000	1
Prueba Final: $S_{(X2)}$	0.022	0.311	0.922	1
$D_{\text{máx}} = S_{(X1)} - S_{(X2)}$	0.556	0.500	0.078	0

Tabla 2.

En la tabla 2 para calcular el valor de la primera celda (0,578), resulta de dividir la primera frecuencia absoluta de la evaluación de “2” del “Diag. Inicial” (52), entre el total de la muestra n_1 (90), $52/90 = 0,578$. De igual forma se procede para determinar la frecuencia relativa de los evaluados de “2” en la “Prueba Final” (2) (segunda celda debajo del valor 0,578); se obtiene el cociente 0,022 que resulta de dividir los dos casos con “2” para el estado “Prueba Final” entre el total de la muestra para esta estado n_2 , que también es de 90; luego: $2/90 = 0,022$.

Ahora se obtendrá el siguiente valor de la frecuencia relativa acumulada para los casos evaluados de “3” para el “Diag. Inicial” (S_{x1}), que en este caso es igual a 21 casos, por lo que resulta que a la frecuencia relativa anterior 0,578 se le debe sumar el cociente $21/90 = 0,233$; luego $0,578 + 0,233 = 0,811$. La siguiente celda para los casos “4” del estado “Diag. Inicial” se le suma el valor anterior de la celda 0,811 con el cociente de dividir 17 casos “4” para “Diag. Inicial” ($17/90 = 0,188$); lo que arroja un resultado igual a $0,811 + 0,188 = 1$ (recordamos que como se está trabajando con valores decimales la suma quizás se exceda un poquito de 1, pero se toma igual a 1 por ser la máxima probabilidad de que ocurra un suceso. Por último al sumarle el valor de 1 al cociente que resulta de dividir 0 casos “5” del “Diag. Inicial” entre el total de la muestra 90 quedará entonces: $1 + 0/90 = 1$. Se aclara que SIEMPRE el último valor de la frecuencia relativa acumulada para ambos casos debe ser igual a la unidad por ser esta la máxima probabilidad de que ocurra un suceso, también conocida como primera ley o propiedad de las probabilidades.

De manera análoga se procede para encontrar el resto de los valores de la tabla 2 para el caso “Prueba Final”, según se puede apreciar en dicha tabla.

- c) Determinar el valor absoluto de las diferencias entre los estados “Antes” y “Después”

Una vez calculados los valores de las frecuencias relativas acumuladas de ambos casos para cada variable (2, 3, 4 y 5), se procede a determinar el valor absoluto de las diferencias entre los estados “Diag. Inicial” y “Prueba Final” para cada caso, recordando que como se calcula el valor absoluto no se tiene en cuenta el orden en que se vaya a efectuar la diferencia, ya que siempre se considerará positiva; por ejemplo, para calcular la diferencia de los casos “2” se puede efectuar: $Sx_2 - Sx_1 = 0,022 - 0,578$ que resultará el valor - 0,556 pero se toma 0,556 (debido a que el signo menos no importa); por el contrario, si se efectúa $Sx_1 - Sx_2 = 0,578 - 0,022 = 0,578$. Se procede de igual forma para obtener el resto de las diferencias de la 3. fila de la tabla 2.

d) Seleccionar el valor máximo de estas diferencias

Como se aprecia en la tabla 2 el valor máximo de los valores absolutos de las diferencias observadas es igual a 0,556; luego este valor se denota por:

$$D_t = 0,556$$

Ya se tiene el valor de D_t , así como el de n_1 y n_2 (ambos iguales a 90), por tanto simplemente hay que sustituir y calcular el valor del estadístico en la expresión (I), luego:

$$\chi^2_{(\text{Observado})} = 4 * (0,556)^2 * \frac{90 * 90}{90 + 90} = 55,64$$

Se aclara que el valor de D_t debe de elevarse al cuadrado, luego multiplicarlo por los productos de $4*90*90$ y luego dividirlo por la suma de $(90+90)$.

$$X^2_{(\text{Observado})} = 55,64$$

Determinar el valor del estadístico $X^2_{\text{Tabla}(v; \alpha)}$, este valor se puede buscar en la tabla del Anexo 1 para los grados de libertad $v = 2$ (**siempre se asume así** para este tipo de estadístico) con $\alpha = 0,05$ y para una cola (que es caso que se está analizando). Este valor es igual a **5,99**

$$\chi^2_{\text{Tabla} (2; 0,05)} = 5,99$$

8) Nivel de decisión

Siempre recordar que la condición para rechazar la hipótesis de nulidad en favor de la alternativa es que se cumpla la condición:

$$\text{Sí } X^2_{(\text{observado})} \geq X^2_{(\text{tabla}) (2; \alpha)} \Rightarrow \text{Rechazar } H_0 \text{ y aceptar } H_1$$

Como $X^2_{\text{Tabla} (2; 0,05)} > X^2_{(\text{Observado})}$, debido a que $55,56 > 5,99$; ello implica (\Rightarrow) que cae en la zona de rechazo H_0 y de aceptación de H_1 , por lo tanto se puede presuponer, con un 95 % de confianza, que los resultados obtenidos en la Prueba Final, luego de la aplicación de la propuesta, fueron superiores a los resultados del Diagnóstico inicial del grupo, que es lo que la autora quería demostrar en su tesis.

Conclusiones

Resulta sustancial acotar la importancia que tiene la utilización de las pruebas de hipótesis que posibilita validar, con un mayor grado de confianza, las investigaciones sociales y educativas, significando el rol que desempeña la utilización de esta poderosa prueba de hipótesis llamada Kolmogorov-Smirnov (en honor a los dos estadísticos que la idearon y fundamentaron) para una muestra grande y una cola, que permiten comparar, con un determinado nivel de confianza que es asumido por el investigador, el estado final de un grupo luego de aplicada la propuestas investigativa con su estado inicial, o de comparar los resultados de un grupo experimental con un grupo de control para muestras grandes (superiores a 40 elementos). Esta prueba puede ser empleada, a manera de triangulación, con otras pruebas de hipótesis, lo que incrementa el grado de pertinencia de una investigación.

Se añade que la prueba de hipótesis Kolmogorov-Smirnov (K-S) también se puede emplear para dos colas con muestras grandes y pequeñas las que utilizan otros tipos de estadísticos.

Referencias bibliográficas

- Celorrio Sánchez, A. (2012). *Pruebas de hipótesis no paramétricas de Kolmogorov-Smirnov para una y dos muestras*. Recuperado de <http://www.monografias.com/trabajos11/docima/docima.shtml#DOS>
- Devore, J. (2000). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. California: THOMSON EDITORES. (Impreso en México).
- Freud, J. (1977). *Estadística elemental moderna*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Montgomery, D. & Runger, G. (1996). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. California: McGraw-Hill. (Impreso en México).
- Moraguez Iglesias, A. (2006-2012). *Curso de estadística aplicada a la investigación educativa. Materiales impresos, compendio de tablas y ejercicios adaptados para el curso*. Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Holguín. [Material electrónico].
- Pupo Lorenzo, N. (2006). *El desarrollo de la cultura energética en estudiantes de Secundaria Básica mediante una concepción didáctica*. (Tesis doctoral). Universidad de Ciencias Pedagógicas José de la Luz y Caballero, Holguín.
- Siegel, S. (1975). *Estadística no paramétrica aplicada a las ciencias de la conducta*. México: Trillas.

Anexo 1

Tabla de valores porcentuales Chi

Cuadrado

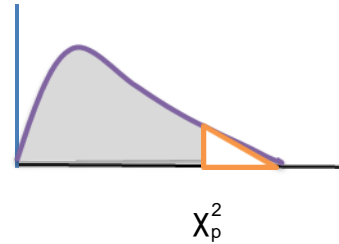
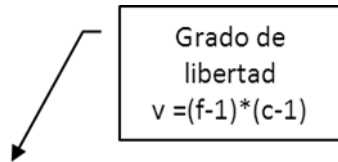


Tabla para determinar los valores porcentuales de la prueba Chi Cuadrado (Valores en percentiles)

Grado de Libertad	Valores de Alfa (α) asumido.										
	1.00	0.99	0.98	0.95	0.90	0.50	0.10	0.05	0.03	0.01	0.01
1	0.0000	0.000	0.001	0.003	0.015	0.4549	2.705	3.841	5.023	6.634	7.8794
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.34	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	11.14	13.27	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	4.351	9.236	11.07	12.83	15.08	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	5.348	10.64	12.59	14.44	16.81	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	6.346	12.01	14.06	16.01	18.47	20.278

							7	7	3	5	
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	7.344	13.36	15.50	17.53	20.09	21.955
							2	7	5	0	
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	8.343	14.68	16.91	19.02	21.66	23.589
							4	9	3	6	
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	9.342	15.98	18.30	20.48	23.20	25.188
							7	7	3	9	
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	10.341	17.27	19.67	21.92	24.72	26.757
							5	5	0	5	
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	11.340	18.54	21.02	23.33	26.21	28.300
							9	6	7	7	
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	12.340	19.81	22.36	24.73	27.68	29.819
							2	2	6	8	
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	13.339	21.06	23.68	26.11	29.14	31.319
							4	5	9	1	
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	14.339	22.30	24.99	27.48	30.57	32.801
							7	6	8	8	
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	15.338	23.54	26.29	28.84	32.00	34.267
							2	6	5	0	
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.08	16.338	24.76	27.58	30.19	33.40	35.718
					5		9	7	1	9	
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	17.338	25.98	28.86	31.52	34.80	37.156
					5		9	9	6	5	
19	6.844	7.633	8.907	10.11	11.65	18.338	27.20	30.14	32.85	36.19	38.582
				7	1		4	4	2	1	
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	19.337	28.41	31.41	34.17	37.56	39.997
				1	3		2	0	0	6	
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	20.337	29.61	32.67	35.47	38.93	41.401
			3	1	0		5	1	9	2	
22	8.643	9.542	10.98	12.33	14.04	21.337	30.81	33.92	36.78	40.28	42.796

			2	8	1		3	4	1	9	
23	9.260	10.19	11.68	13.09	14.84	22.337	32.00	35.17	38.07	41.63	44.181
		6	9	1	8		7	2	6	8	
24	9.886	10.85	12.40	13.84	15.65	23.337	33.19	36.41	39.36	42.98	45.559
		6	1	8	9		6	5	4	0	
25	10.520	11.52	13.12	14.61	16.47	24.337	34.38	37.65	40.64	44.31	46.928
		4	0	1	3		2	2	6	4	
26	11.160	12.19	13.84	15.37	17.29	25.336	35.56	38.88	41.92	45.64	48.290
		8	4	9	2		3	5	3	2	
27	11.808	12.87	14.57	16.15	18.11	26.336	36.74	40.11	43.19	46.96	49.645
		9	3	1	4		1	3	5	3	
28	12.461	13.56	15.30	16.92	18.93	27.336	37.91	41.33	44.46	48.27	50.993
		5	8	8	9		6	7	1	8	
29	13.121	14.25	16.04	17.70	19.76	28.336	39.08	42.55	45.72	49.58	52.336
		6	7	8	8		7	7	2	8	
30	13.787	14.95	16.79	18.49	20.59	29.336	40.25	43.77	46.97	50.89	53.672
		3	1	3	9		6	3	9	2	
31	14.458	15.65	17.53	19.28	21.43	30.336	41.42	44.98	48.23	52.19	55.003
		5	9	1	4		2	5	2	1	
32	15.134	16.36	18.29	20.07	22.27	31.336	42.58	46.19	49.48	53.48	56.328
		2	1	2	1		5	4	0	6	
33	15.815	17.07	19.04	20.86	23.11	32.336	43.74	47.40	50.72	54.77	57.648
		4	7	7	0		5	0	5	6	
34	16.501	17.78	19.80	21.66	23.95	33.336	44.90	48.60	51.96	56.06	58.964
		9	6	4	2		3	2	6	1	
35	17.192	18.50	20.56	22.46	24.79	34.336	46.05	49.80	53.20	57.34	60.275
		9	9	5	7		9	2	3	2	
36	17.887	19.23	21.33	23.26	25.64	35.336	47.21	50.99	54.43	58.61	61.581
		3	6	9	3		2	8	7	9	
37	18.586	19.96	22.10	24.07	26.49	36.336	48.36	52.19	55.66	59.89	62.883

		0	6	5	2		3	2	8	3	
38	19.289	20.69	22.87	24.88	27.34	37.335	49.51	53.38	56.89	61.16	64.181
		1	8	4	3		3	4	6	2	
39	19.996	21.42	23.65	25.69	28.19	38.335	50.66	54.57	58.12	62.42	65.476
		6	4	5	6		0	2	0	8	
40	20.707	22.16	24.43	26.50	29.05	39.335	51.80	55.75	59.34	63.69	66.766
		4	3	9	1		5	8	2	1	
41	21.421	22.90	25.21	27.32	29.90	40.335	52.94	56.94	60.56	64.95	68.053
		6	5	6	7		9	2	1	0	
42	22.138	23.65	25.99	28.14	30.76	41.335	54.09	58.12	61.77	66.20	69.336
		0	9	4	5		0	4	7	6	
43	22.859	24.39	26.78	28.96	31.62	42.335	55.23	59.30	62.99	67.45	70.616
		8	5	5	5		0	4	0	9	
44	23.584	25.14	27.57	29.78	32.48	43.335	56.36	60.48	64.20	68.71	71.893
		8	5	7	7		9	1	1	0	
45	24.311	25.90	28.36	30.61	33.35	44.335	57.50	61.65	65.41	69.95	73.166
		1	6	2	0		5	6	0	7	
46	25.041	26.65	29.16	31.43	34.21	45.335	58.64	62.83	66.61	71.20	74.437
		7	0	9	5		1	0	7	1	
47	25.775	27.41	29.95	32.26	35.08	46.335	59.77	64.00	67.82	72.44	75.704
		6	6	8	1		4	1	1	3	
48	26.511	28.17	30.75	33.09	35.94	47.335	60.90	65.17	69.02	73.68	76.969
		7	5	8	9		7	1	3	3	
49	27.249	28.94	31.55	33.93	36.81	48.335	62.03	66.33	70.22	74.91	78.231
		1	5	0	8		8	9	2	9	
50	27.991	29.70	32.35	34.76	37.68	49.335	63.16	67.50	71.42	76.15	79.490
		7	7	4	9		7	5	0	4	

Fuente: Valores obtenidos por la función PRUEBA.CHI.INV de Excel.